# MODUL 8

# KALKULUS I

Yuan Anisa, S.Si.,M.Si

0130069002

Matematika

Program Studi Teknik Elektro

Fakultas Teknik

Universitas Medan Area

2024

# DAFTAR ISI

**Bahan Kajian/Materi Pembelajaran:**

1. Pemahaman tentang sistem bilangan riil, pertidaksamaan bilangan riil, dan pertidaksamaan nilai mutlak
2. Pemahaman tentang konsep garis lurus, gradien, persamaan garis, persamaan garis lingkaran, menggambar grafik persamaan
3. Pemahaman tentang penentuan domain dan range dari suatu fungsi, menggambar grafik fungsi, dan fungsi komposisi
4. Pemahaman tentang sifat dasar sinus cosinus, menggambar grafik fungsi trigonometri
5. Pemahaman tentang sifat logaritma dan trigonometri
6. Pemahaman tentang definisi limit dan mampu menentukan limit fungsi di satu titik
7. Pemahaman tentang teorema-teorema limit, nilai limit fungsi, dan memeriksa kekontinuan fungsi
8. Pemahaman tentang perhitungan nilai limit tak terhingga dan di tak hingga
9. Pemahaman tentang konsep turunan, aturan pencarian turunan, turunan dari penjumlahan, perkalian dan pembagian fungsi
10. Pemahaman tentang aturan rantai, turunan ke n dari suatu fungsi, percepatan dan kecepatan dengan teknik diferensial
11. Pemahaman tentang turunan fungsi implisit
12. Pemahaman tentang kecepatan dari laju benda, nilai aproksimasi fungsi dengan diferensial
13. Pemahaman tentang cara menggambar grafik fungsi polynomial dan rasional, serta teorema nilai rata-rata

**CPMK**

Mampu menggunakan ilmu teknologi informasi dalam membangun pemahaman prinsip-prinsip kerekayasaan **(CPMK 2)**

**Sub CPMK**

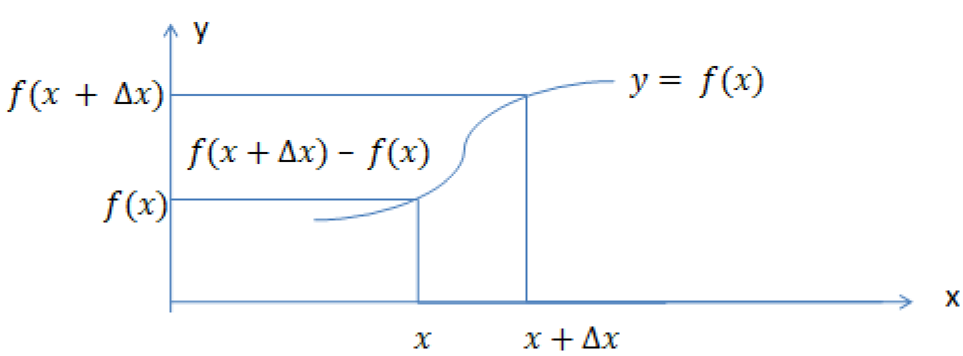
Mahasiswa mampu memahami

1. Konsep Turunan
2. Aturan Pencapaian
3. Turunan penjumlahan
4. Turunan pengurangan
5. Turunan perkalian
6. Turunan pembagian

# TURUNAN/DIFFERENSIAL

## KONSEP LAJU PERUBAHAN FUNGSI

Dari grafik dibawah ini, diketahui $y$ = *f(x)*, dimana $x^n$ dengan inverval $(x, \Delta x)$sehingga nilai fungsi berubah dari $f(x) = f(x + \Delta x)$.




Perubahan rata-rata nilai fungsi $f$ terhadap $x$ dalam interval $(x, \Delta x)$adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika nilai $\Delta x$ makin kecil maka nilainya akan mendekati nol sehingga bentuk turunan menjadi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Beberapa fungsi pada differensial

**1. Fungsi Konstan**

Jika $f(x) = k$, dengan $k$ konstanta, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 0$$

$$f'(x) = 0$$

**2. Fungsi Identitas**

Jika $f(x) = x$, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 1$$

$$f'(x) = 1$$

**3. Fungsi Pangkat**

Jika $f(x) = x^n$ dan $n$ bilangan rasional, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n\right) - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}\right)$$

$$f'(x) = \binom{n}{1} x^{n-1}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

**4. Hasil Kali Konstanta dengan Fungsi**

Jika $f$ suatu fungsi, $k$ suatu konstanta, dan $g$ fungsi yang didefinisikan oleh $g(x)=k\,f(x)$, maka

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k.f(x+h) - k.f(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} k \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$g'(x) = k.f'(x)$$

**5. Jumlah Fungsi**

Jika $u$ dan $v$ adalah fungsi-fungsi dari $x$ yang dapat diturunkan dan $y= f(x)=u(x)+v(x)$, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\big(u(x+h) + v(x+h)\big) - \big(u(x) + v(x)\big)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$
$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

**6. Selisih Fungsi**

**Jika *u* dan *v* adalah fungsi-fungsi dari *x* yang dapat diturunkan dan *y*= *f(x)=u(x)-v(x)*, maka**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\big(u(x+h) - v(x+h)\big) - \big(u(x) - v(x)\big)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$
$$f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

**7. Perkalian Fungsi**

Jika *u* dan *v* adalah fungsi-fungsi dari *x* yang dapat diturunkan dan *y*= *f(x)=u(x).v(x)*, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\big(u(x+h).v(x+h)\big) - \big(u(x).v(x)\big)}{h}$$

pada pembilang ditambahkan

$-u(x+h).v(x) + u(x+h).v(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\big(u(x+h).v(x+h)\big) - u(x+h).v(x) + u(x+h).v(x) - \big(u(x).v(x)\big)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x)[u(x+h) - u(x)]}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} u(x+h).\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x).\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$
$$f'(x) = u(x).v'(x) + v(x).u'(x)$$

**8. Pembagian Fungsi**

Jika *u* dan *v* adalah fungsi-fungsi dari *x* yang dapat diturunkan dan *f(x)*= ,*v(x)*≠0 maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{v(x).u(x+h) - u(x).v(x+h)}{v(x).v(x+h)}}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{v(x).u(x+h) - u(x).v(x+h)}{h} . \frac{1}{v(x).v(x+h)}\right]$$

pembilang ditambahkan

$[-v(x).u(x) + u(x).v(x)]$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}[\frac{v(x).u(x+h) - v(x).u(x) + u(x).v(x) - u(x).v(x+h)}{h}.\frac{1}{v(x).v(x+h)}]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{v(x)[u(x+h) - u(x)] - u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h}.\frac{1}{v(x).v(x+h)}$$

$$f'(x) = \left[\lim_{h\to 0} v(x)\frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} u(x)\frac{[v(x+h) - v(x)]}{h}\right].\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x).v(x+h)}$$

$$f'(x) = \left[v(x)\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} - u(x)\lim_{h\to 0}\frac{[v(x+h) - v(x)]}{h}\right].\frac{1}{v(x).v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{v(x).v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'^{(x)}.v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$$

Contoh

1. Jika $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$, maka $f'(x) = \cdots$

   Penyelesaian:

   Gunakan aturan turunan dasar

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$$
$$= x^2 - x^{-1} + 1$$
$$f'(x) = 2x^{2-1} - (-1)x^{-1-1} + 0$$
$$= 2x + x^{-2}$$

2. Jika $g(x) = \frac{1}{x} + x^3 - \sqrt{x}$, maka $g'(x) = \cdots$

   Penyelesaian:

   Gunakan aturan turunan dasar

   $g(x) = \frac{1}{x} + x^3 - \sqrt{2x}$

$$= x^{-1} + x^3 - (x)^{\frac{1}{2}}$$
$$g'(x) = (-1)x^{-1-1} + 3x^{3-2} - \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= -x^{-2} + 3x - \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{x^2} + 3x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. Jika $f(m) = 4 + \sqrt[4]{m^3} + 3\sqrt[3]{m^2}$, maka nilai $f'(x) = \cdots$

   Penyelesaian:

   Diketahui

$$f(m) = 4 + \sqrt[4]{m^3} + 3\sqrt[3]{m^2}$$
$$= 4 + m^{\frac{3}{4}} + 3(m^{\frac{2}{3}})$$

   Turunan pertama dari $f(m)$ adalah

$$f'(m) = 0 + \frac{3}{4}m^{\frac{3}{4}-1} + 3\frac{2}{3}(m^{\frac{2}{3}-1})$$
$$= \frac{3}{4}m^{-\frac{1}{4}} + 2\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)$$
$$= \frac{3}{4\sqrt[4]{m}} + \frac{2}{\sqrt[3]{m}}$$

4. Jika $y = (2x^2 - 1)\sqrt[3]{3x^5}$, maka tentukan hasil dari $f'(x) = \cdots$

Penyelesaian:
Diketahui
$y = (2x^2 - 1)\sqrt[3]{x^5}$,
$y = (2x^2 - 1)x^{\frac{5}{3}}$,
Maka terdapat dua fungsi yaitu fungsi $(2x^2 - 1)$ dan $\sqrt[3]{x^5}$, sehingga dengan menggunakan aturan pembagian dapat memisalkan sesuatu pada kedua fungsi,
Misalkan
$u = 2x^2 - 1 \rightarrow u' = 4x$
$v = x^{\frac{5}{3}} \rightarrow v' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$
Dengan demikian,

$$f'(x) = u'v - uv'$$
$$= 4x\left(x^{\frac{5}{3}}\right) + (2x^2 - 1)\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$
$$= 4x\sqrt[3]{x^5} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}(2x^2 - 1)$$

5. Jika $f(x) = \left(\frac{x-3}{2x+1}\right)$, maka niali dari $f'(x) = \cdots$
Penyelesaian:
Diketahui $f(x) = \left(\frac{x-3}{2x+1}\right)$
Maka terdapat dua fungsi yaitu fungsi $x - 3$ dan $2x + 1$, sehingga dengan menggunakan aturan pembagian dapat memisalkan sesuatu pada kedua fungsi,
Misalkan
$u = x - 3 \rightarrow u' = 1$
$v = 2x + 1 \rightarrow v' = 2$
Dengan demikian,

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$= \frac{1(2x + 1) - (x - 3)(2)}{(2x + 1)^2}$$
$$= \frac{2x + 1 - 2x + 6}{(2x + 1)^2}$$
$$= \frac{7}{(2x + 1)^2}$$

# Daftar Pustaka


Ratnadewi., dkk (2016). *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi.*Bandung: Rekayasa Sains

J. Purcel, Edwin dan Dale Varberg.(1994). *Kalkulus dan Geometri Analissi, Jilid 1Edisi 5.* Jakarta: Erlangga

George F. Simmons. (1976). *Calculus With Analytic Geometry, Second Edition.* North America: The McGraw-Hill

Thompson, Silvanus. (2012). *Calculus Made Easy.*London: The Macmillan And Co.

Kreyszig, Erwin. (2011). Advanced Engineering Mathematics.The United State of America: Jhon Wiley & Sons, Inc