MODUL 5-7

KALKULUS I

Yuan Anisa, S.Si.,M.Si

0130069002

Matematika

Program Studi Teknik Elektro

Fakultas Teknik

Universitas Medan Area

2024

DAFTAR ISI

MODUL 1

BILANGAN RIIL, PERTIDAKSAMAAN, MUTLAK

MODUL 2

FUNGSI EKSPONEN DAN FUNGSI LOGARITMA

MODUL 3

FUNGSI TRIGONOMETRI

MODUL 4

PERSAMAAN GARIS DAN FUNGSI KUADRAT

MODUL 5

LIMIT

MODUL 6

LIMIT

MODUL 7

LIMIT

MODUL 9

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MODUL 10

TURUNAN EKSPONEN DAN LOGARITMA

MODUL 11

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

MODUL 12

PERCEPATAN DAN KECEPATAN TEKNIK DIFERENSIAL

MODUL 13

TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

MODUL 14

APROKSIMASI FUNGSI DENGAN DIFERENSIAL

MODUL 15

MAX MIN TURUNAN

Bahan Kajian/Materi Pembelajaran:

1. Pemahaman tentang sistem bilangan riil, pertidaksamaan bilangan riil, dan pertidaksamaan nilai mutlak
2. Pemahaman tentang konsep garis lurus, gradien, persamaan garis, persamaan garis lingkaran, menggambar grafik persamaan
3. Pemahaman tentang penentuan domain dan range dari suatu fungsi, menggambar grafik fungsi, dan fungsi komposisi
4. Pemahaman tentang sifat dasar sinus cosinus, menggambar grafik fungsi trigonometri
5. Pemahaman tentang sifat logaritma dan trigonometri
6. Pemahaman tentang definisi limit dan mampu menentukan limit fungsi di satu titik
7. Pemahaman tentang teorema-teorema limit, nilai limit fungsi, dan memeriksa kekontinuan fungsi
8. Pemahaman tentang perhitungan nilai limit tak terhingga dan di tak hingga
9. Pemahaman tentang konsep turunan, aturan pencarian turunan, turunan dari penjumlahan, perkalian dan pembagian fungsi
10. Pemahaman tentang aturan rantai, turunan ke n dari suatu fungsi, percepatan dan kecepatan dengan teknik diferensial
11. Pemahaman tentang turunan fungsi implisit
12. Pemahaman tentang kecepatan dari laju benda, nilai aproksimasi fungsi dengan diferensial
13. Pemahaman tentang cara menggambar grafik fungsi polynomial dan rasional, serta teorema nilai rata-rata

CPMK

Mampu menggunakan ilmu matematika dalam membangun pemahaman prinsip-prinsip kerekayasaan **(CPMK 1)**

Sub CPMK

Mahasiswa mampu memahami

1. Limit Aljabar
2. Limit Trigonometri,
3. Limit Tak hingga

LIMIT DAN KEKONTINUAN FUNGSI

1. Limit Fungsi

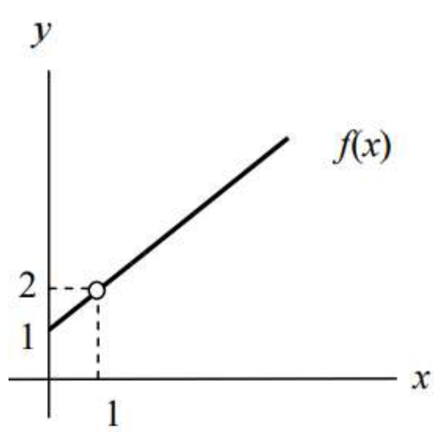
a. Pengantar Limit

Tinjau fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Perhatikan bahwa fungsi ini tidak terdefinisi pada x = 1 karena memiliki bentuk 0/0. Akan tetapi, muncul pertanyaan "apakah f(x) mendekati bilangan tertentu ketika x mendekati 1?". Berikut jawabannya dalam bentuk tabel dan grafik.

x	$f(x)$
1,01	2,01
1,001	2,001
1,0001	2,0001
1,00001	2,00001
1	?
0,99999	1,99999
0,9999	1,9999



Dari tabel di atas terlihat bahwa f(x) mendekati 2 ketika x mendekati 1. Selanjutnya, secara aljabar (melalui pemfaktoran), diperoleh

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=x+1.$$

Pembagian $(x-1)/(x-1)=1$ adalah sah sebab $x\neq 1$. Dari sini diperoleh grafik f(x) merupakan garis lurus seperti diperlihatkan pada Gambar diatas. Akan tetapi, garis ini menyisakan lubang (ditandai oleh ○) pada titik (1,2) sebab $x\neq 1$. Kenyatan ini juga menuju pada simpulan bahwa $f(x)$ mendekati 2 ketika x mendekati 1. Ungkapan $f(x)$ mendekati 2 ketika x mendekati 1 secara matematis ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

dan dibaca "limit ketika x mendekati 1 dari f(x) adalah 2". Dengan demikian, pada kasus di atas diperoleh

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2\,.$$

Definisi 1. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit *L* untuk *x* mendekati *c*, ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk nilai *x* yang sangat "dekat" dengan *c*, tetapi, berakibat *f*(*x*) "mendekati" *L*.

a. Nilai tertentu dan tak tentu dalam limit

Berikut ketentuan nilai tertentu pada limit:

1. $\frac{a}{b} = k$
2. $\frac{0}{k} = 0$
3. $\frac{k}{0} = \infty$
4. $\frac{k}{\infty} = 0$
5. $\frac{\infty}{k} = \infty$
6. $\infty + \infty = \infty$
7. $\infty^k = \infty, dimana\ k > 0$
8. $k\infty = \infty$

Berikut ketentuan nilai tak tentu pada limit:

1. $\frac{0}{0}$
2. 0^0
3. $\frac{\infty}{\infty}$

4. $\infty - \infty$

b. Sifat-sifat Dasar Limit Fungsi

Berikut sifat-sifat dasar limit fungsi, yaitu:

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. Jika $\lim_{x\to c} f(x)$ dan $\lim_{x\to c} g(x)$ ada dan $k \in R$ maka:

    a) $\lim_{x\to c}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

    b) $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$

    c) $\lim_{x\to c}\{f(x)g(x)\} = \lim_{x\to c} f(x) \,.\, \lim_{x\to c} g(x)$

    d) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, dimana $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

    e) Untuk sebarang $n \in N$

    $(1)\ \lim_{x\to c}\{f(x)\}^n = \left\{\lim_{x\to c} f(x)\right\}^n$

    $(2)\ \lim_{x\to c}\{f(x)\}^{-n} = \left\{\lim_{x\to c} f(x)\right\}^{-n}$,

    asalkan $\lim_{x\to c} f(x) \neq 0$

    $(3)\ \lim_{x\to c}\{f(x)\}^{1/n} = \left\{\lim_{x\to c} f(x)\right\}^{1/n}$,

    asalkan untuk n genap, $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$.

Contoh

1. Hitung $\lim_{x\to -1}\left(3x^2 - x - 6\right)$

    Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\left(3x^2 - x - 6\right) &= \lim_{x\to -1} 3x^2 - \lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 6 \\
&= 3\lim_{x\to -1} x^2 - (-1) - 6 \\
&= 3\left(\lim_{x\to -1} x\right)^2 + 1 - 6 \\
&= 3(-1)^2 + 1 - 6 = -2
\end{aligned}
$$

2. Hitung $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x - 15}{x+3}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x - 15}{x+3} = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x - 15)}{\lim_{x \to 2} (x+3)}$$

$$= \frac{\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 - 2\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 15}{\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3} = \frac{2^2 - 2.2 - 15}{2+3}$$

$$= -3$$

3. Hitung $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{1}{5x-1}}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{1}{5x-1}} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{5x-1}\right)^{1/2} = \left(\lim_{x \to 2} \frac{1}{5x-1}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\lim_{x \to 2} (5x-1)}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{5\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 1}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{5.2-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{3}$$

b. Metode-metode Penyelesaian Limit

1. Metode Substitusi

Metode paling mudah dengan menentukan hasil suatu limit fungsi adalah dengan mensubstitusi langsung nilai kedalam fungsi f(x). Syarat metode ini adalah jika hasil substitusi tidak membentuk nilai "tak tentu". Contoh:

1. Hitunglah $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 3)$

Jawaban:

Karena $f(x) = 2x^2 - 3$ adalah suatu fungsi suku banyak, maka dapat dilakukan subsitusi langsung dengan mengganti nilai x menjadi 2

$$\lim_{x \to 2} (2x^2 - 3) = f(2) = 2.2^2 - 3 = 5$$

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7x^3 + x^2 - 5x - 40}{3x^2 + x - 10}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^3 + x^2 - 5x - 40}{3x^2 + x - 10} = \text{f}(2) = \frac{7(2)^3 + (2)^2 - 5.2 - 40}{3.2^2 + 2 - 10} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

2. **Metode Pemfaktoran**

Jika pada metode substitusi menghasilkan suatu nilai bentuk tak tentu seperti:

$$\infty,\ \frac{0}{0}, 0^0,\ \infty - \infty,\ \infty^0,\ atau\ \infty^\infty$$

maka fungsi tersebut harus difaktorkan terlebih dahulu sehingga bentuknya tidak menjadi bentuk tak tentu, baru kemudian bisa disubstitusikan $x \to c$. Contoh:

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Karena untuk x = 2 nilai fungsi pembilang dan penyebut sama dengan 0, maka Teorema Subsitusi tidak berlaku. Bentuk 0/0 disebut bentuk tak tentu, dan untuk mencari nilai limitnya dilakukan penyederhanaan aljabar dengan faktorisasi seperti berikut.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x+1) = 3$$

Pembilang dan penyebut dapat dibagi (x-2) sebab untuk $x \to 2$, $x - 2 \neq 0$

3. **Metode perkalian dengan akar sekawan**

Metode ini digunakan jika pada metode substitusi langsung menghasilkan nilai limit yang irasional. Fungsi dikalikan dengan akar sekawannya agar bentuk limit tersebut tidak irasional, sehingga bisa dilakukan kembali substitusi langsung nilai $x \to c$.

Contoh:

$$\lim_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = ...$$

Jawaban:

$$\lim_{x \to 3} \frac{16 - (x^2 + 7)}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \lim_{x \to 3} \frac{(4 - \sqrt{x^2 + 7})(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = 4 + 4 = 8$$

Soal!

Tentukan hasil dari limit berikut ini:

1. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \cdots$
2. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \cdots$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \cdots$
4. $\lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \cdots$
5. $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \cdots$
6. $\lim_{x\to 25} \frac{25-x}{5-\sqrt{x}} = \cdots$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x} = \cdots$
8. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16-5}} = \cdots$
9. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \cdots$
10. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-8x+4}{x^2-5x+6} = \cdots$

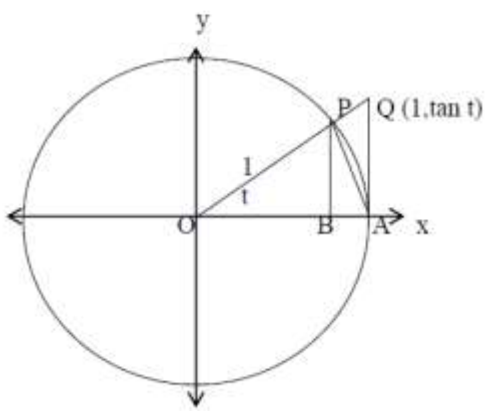
LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

DEFINISI

Limit fungsi trigonometri memiliki definisi sebagai nilai terdekat suatu sudut dalam fungsi trigonometri.

Perhitungan ini dapat disubstitusikan layaknya limit fungsi aljabar, tapi limit yang jika disubstitusikan akan bernilai 0 atau limit tak tentu maka penyelesaian dapat dilakukan dengan mengubah fungsi trigonometri tersebut menjadi identitas trigonometri.

Perhatikan luas daerah OAB, luas juring OAB, dan luas daerah OAQ pada Gambar berikut,



Teorema apit

$Andaikan\ f,\ g$ dan h fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat ke c, kecualu mungkin di c.

Jika $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$

Luas daerah Δ OAP $\leq$ Luas Juring OAP $\leq$ Luas daerah Δ OAQ

$$\text{Luas daerah } \Delta\text{ OAP} = \frac{alas \times tinggi}{2} = \frac{OA \times BP}{2} = \frac{1 \times \sin t}{2} = \frac{\sin t}{2}$$

$$\text{Luas Juring OAP} = \frac{t \times luas\ \text{lingkaran}}{2\pi} = \frac{t \times \pi(1)^2}{2\pi} = \frac{t}{2}$$

$$\text{Luas daerah } \Delta\text{ OAQ} = \frac{alas \times tinggi}{2} = \frac{OA \times AQ}{2} = \frac{1 \times \tan t}{2} = \frac{\tan t}{2}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\frac{\sin t}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\tan t}{2} \Rightarrow \sin t \leq t \leq \tan t \Rightarrow 1 \leq \frac{t}{\sin t} \leq \frac{1}{\cos t}$$

$$\lim_{t\to 0} 1 \leq \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos t} \Rightarrow 1 \leq \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \leq \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \cos t} \Rightarrow 1 \leq \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \leq 1.$$

Berdasarkan Teorema Apit disimpulkan $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\frac{t}{\sin t}}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t\cos t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{\cos t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}=$$

$$1\ .\ 1=1$$

Rumus dasar limit fungsi trigonometri, yaitu:

(1) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\sin x}{x}=1$ (2) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{x}{\sin x}=1$

(3) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\tan x}{x}=1$ (4) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{x}{\tan x}=1$

Dari rumus dasar diatas dapat dikembangkan rumus-rumus sebagai berikut:

(1) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$ dan $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

(2) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$ dan $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{bx}{\tan ax}=\frac{b}{a}$

(3) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$ dan $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\tan bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

Contoh:

Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini :

(a) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\left[\frac{\sin 4x}{3x}-\frac{\tan 2x}{\sin 6x}+\frac{8x}{\tan 2x}\right]$ (b) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{\sin^2 6x}{3x.\tan 4x}$

(c) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{2\tan^2 3x.\sin 2x}{4x^2.\sin 6x}$ (d) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \frac{6.\sin^3 2x}{\sin 4x.\sin 3x}$

Penyelesaian:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{3x}-\frac{\tan 2x}{\sin 6x}+\frac{8x}{\tan 2x}\right] = \frac{4}{3} - \frac{2}{6} + \frac{8}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 4 = 5$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 6x}{3x.\tan 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}.\frac{\sin 6x}{\tan 4x} = \left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = \frac{36}{12} = 3$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\tan^2 3x.\sin 2x}{4x^2.\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\left(\frac{\tan 3x}{4x}\right)\left(\frac{\tan 3x}{x}\right)\left(\frac{\sin 2x}{\sin 6x}\right)$

$= 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{2}{6}\right)$

$= 3/2$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6.\sin^3 2x}{\sin 4x.\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} 6\left(\frac{\sin 2x}{\sin 4x}\right)\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)\sin 2x$

$= 6\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\sin 2(0)$

$= \left(\frac{24}{12}\right)0$

$= 0$

Menyesuaikan dengan rumus limit fungsi trigonometri diatas, jika $p = x - a$ maka untuk nilai x mendekati a diperoleh nilai p mendekati 0, sehingga:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin a(x-a)}{b(x-a)} = \lim_{p\to 0}\frac{\sin ap}{bp} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\tan a(x-a)}{b(x-a)} = \lim_{p\to 0}\frac{\tan ap}{bp} = \frac{a}{b}$$

CONTOH

Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3\sin(x-2)}{(4x-8)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{6\tan^2(2x-6)}{(3x-9)^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 4}\left[\frac{\sin(2x-8)}{\tan(x-4)+(3x-12)}\right]$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(2x^2-6x+4)}{3x^2-9x+6}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(3x-6)}{x^2+2x-8}$

Penyelesaian:

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{3\sin(x-2)}{(4x-8)} = \lim_{x\to 2} \frac{3\sin(x-2)}{4(x-2)} = 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{6\tan^2(2x-6)}{(3x-9)^2} = \lim_{x\to 3} 6\left(\frac{\tan(2x-6)}{3x-9}\right)^2$

$$= \lim_{x\to 3} 6\left(\frac{\tan 2(x-3)}{3(x-3)}\right)^2$$

$$= 6.\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 8/3$$

(c) $\lim_{x\to 4} \left[\frac{\sin(2x-8)}{\tan(x-4)+(3x-12)}\right] = \lim_{x\to 4} \left[\frac{\sin 2(x-4)}{\tan(x-4)+3(x-4)}\right]$

$$= \lim_{x\to 4} \left[\frac{\frac{\sin 2(x-4)}{(x-4)}}{\frac{\tan(x-4)}{(x-4)} + \frac{3(x-4)}{(x-4)}}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{1+3}\right)$$

$$= 1/2$$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(2x^2-6x+4)}{3x^2-9x+6} = \lim_{x\to 1} \frac{\tan 2(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\tan 2(x+3)(x-1)}{3(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(3x-6)}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin 3(x-2)}{(x+4)(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+4)}.\frac{\sin 3(x-2)}{(x-2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2+4}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$= \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Disamping rumus pengembangan di atas sering pula digunakan rumus rumus trigonometri lainnya yang telah dipelajari pada bab sebelumnya, yakni

Catatan

Identitas trigonometri yang biasa digunakan:

a. $1 - \cos Ax = 2\sin^2(\frac{1}{2}Ax)$

b. $\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$

c. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1$

$= 1 - 2\sin^2 A$

d. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

e. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

f. $\sin A + \sin B = 2\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$

g. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin \frac{1}{2}(A-B)$

h. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$

i. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B) \sin\frac{1}{2}(A-B)$

CONTOH:

Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}} \dfrac{1-\cos 6x}{\cos 8x - 1}$

(b) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}} \dfrac{3\cos 4x - 3}{2.\sin^2 3x}$

(c) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}} \dfrac{4-4\cos 2x}{1-\cos^2 3x}$

(d) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}} \dfrac{2-2\cos^2 6x}{3\cos^2 2x - 3}$

Penyelesaian:

(a) $$\underset{x\to 0}{\text{Limit}} \frac{1-\cos 6x}{\cos 8x - 1} = \underset{x\to 0}{\text{Limit}} \frac{1-\cos 2(3x)}{\cos 2(4x) - 1}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}} \frac{2.\sin^2 3x}{-2.\sin^2 4x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}} -\left(\frac{.\sin 3x}{.\sin 4x}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{.3}{.4}\right)^2$$

$$= -\frac{.9}{.16}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cos 4x - 3}{2.\sin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3(\cos 2(2x) - 1)}{2.\sin^2 3x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3.\sin^2 2x}{2.\sin^2 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{3}{2}\left(\frac{.\sin 2x}{.\sin 3x}\right)^2$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{.2}{.3}\right)^2$$

$$= -\frac{.2}{.3}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 - 4\cos 2x}{1 - \cos^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4(1-\cos 2x)}{1-\cos^2 3x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4.(2\sin^2 x)}{\sin^2 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 8\left(\frac{.\sin x}{.\sin 3x}\right)^2$$

$$= 8\left(\frac{1}{.3}\right)^2$$

$$= \frac{8}{9}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2\cos^2 6x}{3\cos^2 2x - 3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos^2 6x)}{3(\cos^2 2x - 1)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4.(\sin^2 6x)}{3.(-\sin^2 2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{4}{3}\left(\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{4}{3}(9)$$

$$= -12$$

(e) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{1-\cos 8x} = \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{-2\sin\frac{1}{2}(5x+3x).\sin\frac{1}{2}(5x-3x)}{1-\cos 2(4x)}$

$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{-2\sin 4x.\sin x}{2\sin^2 4x}$

$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{-\sin x}{\sin 4x}$

$= -\dfrac{1}{4}$

(f) $\underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{3\cos 6x - 3\cos 2x}{1-\cos^2 2x} = \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{3(\cos 6x - \cos 2x)}{1-\cos^2 2x}$

$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{-6\sin\frac{1}{2}(6x+2x).\sin\frac{1}{2}(6x-2x)}{\sin^2(2x)}$

$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{-6\sin 4x.\sin 2x}{\sin 2x.\sin 2x}$

$= \underset{x\to 0}{\text{Limit}}\ \dfrac{-6\sin 4x}{\sin 2x}$

$= -6\left(\dfrac{4}{2}\right)$

$= -12$

SOAL

Selesaikan hasil dari limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{3x\tan 4x}{2\,sin^2 x\ 2x} =$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^2+2x} =$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)\sin(x-1)}{((x-1)(x+2))^2} =$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+sin\,x\tan x}{1-\cos 2x} =$

5. Jika $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\cos 2x-1} = m$ dan $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4} = n$ maka $m+n =$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2(x-1)}{4x^2-8x+4} =$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x}{x\cos x} =$

Daftar Pustaka

Ratnadewi., dkk (2016). *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi*.Bandung: Rekayasa Sains

J. Purcel, Edwin dan Dale Varberg.(1994). *Kalkulus dan Geometri Analissi, Jilid 1Edisi 5*. Jakarta: Erlangga

George F. Simmons. (1976). *Calculus With Analytic Geometry, Second Edition*. North America: The McGraw-Hill

Thompson, Silvanus. (2012). *Calculus Made Easy*.London: The Macmillan And Co.

Kreyszig, Erwin. (2011). Advanced Engineering Mathematics.The United State of America: Jhon Wiley & Sons, Inc