

MODUL 2
KALKULUS



Yuan Anisa, S.Si.,M.Si

0130069002

Matematika

Program Studi Teknik Elektro

Fakultas Teknik

Universitas Medan Area

2024

DAFTAR ISI

BAHAN KAJIAN

MODUL 1

BILANGAN RIIL, PERTIDAKSAMAAN, MUTLAK

MODUL 2

FUNGSI EKSPONEN DAN FUNGSI LOGARITMA

MODUL 3

FUNGSI TRIGONOMETRI

MODUL 4

PERSAMAAN GARIS DAN FUNGSI KUADRAT

MODUL 5

LIMIT

MODUL 6

LIMIT

MODUL 7

LIMIT

MODUL 9

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MODUL 10

TURUNAN EKSPONEN DAN LOGARITMA

MODUL 11

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

MODUL 12

PERCEPATAN DAN KECEPATAN TEKNIK DIFERENSIAL

MODUL 13

TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

MODUL 14

APROKSIMASI FUNGSI DENGAN DIFERENSIAL

MODUL 15

MAX MIN TURUNAN

Bahan Kajian/Materi Pembelajaran:

1. Pemahaman tentang sistem bilangan riil, pertidaksamaan bilangan riil, dan pertidaksamaan nilai mutlak
2. Pemahaman tentang konsep garis lurus, gradien, persamaan garis, persamaan garis lingkaran, menggambar grafik persamaan
3. Pemahaman tentang penentuan domain dan range dari suatu fungsi, menggambar grafik fungsi, dan fungsi komposisi
4. Pemahaman tentang sifat dasar sinus cosinus, menggambar grafik fungsi trigonometri
5. Pemahaman tentang sifat logaritma dan trigonometri
6. Pemahaman tentang definisi limit dan mampu menentukan limit fungsi di satu titik
7. Pemahaman tentang teorema-teorema limit, nilai limit fungsi, dan memeriksa kekontinuan fungsi
8. Pemahaman tentang perhitungan nilai limit tak terhingga dan di tak hingga
9. Pemahaman tentang konsep turunan, aturan pencarian turunan, turunan dari penjumlahan, perkalian dan pembagian fungsi
10. Pemahaman tentang aturan rantai, turunan ke n dari suatu fungsi, percepatan dan kecepatan dengan teknik diferensial
11. Pemahaman tentang turunan fungsi implisit
12. Pemahaman tentang kecepatan dari laju benda, nilai aproksimasi fungsi dengan diferensial
13. Pemahaman tentang cara menggambar grafik fungsi polynomial dan rasional, serta teorema nilai rata-rata

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK):

1. Mahasiswa mampu menjelaskan latar belakan dan manfaat kalkulus pada bidang teknik elektro (**CPMK 1**)
2. Mahasiswa mampu memahami sistem bilangan riil dan pertidaksamaan bilangan real dengan tanda mutlak, persamaan garis dan menggambar grafik fungsi, range, domain suatu fungsi dan limit fungsi (**CPMK 2**)
3. Memahami konsep turunan dan penerapannya terutama dibidang Elektro (**CPMK 3**)

EKSPONENSIAL

a. Bilangan Berpangkat Bilangan Asli

Misalkan p bilangan asli dan a bilangan real. Bilangan a^p (dibaca: a pangkat p) dapat dinyatakan sebagai

$$a^p = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$$

Yaitu perkalian bilangan a sebanyak p kali/faktor. Bilangan a disebut basis dan bilangan p disebut pangkat atau eksponen.

Operasi Aljabar Bilangan Berpangkat

Untuk a dan b bilangan bulat serta p dan q bilangan asli, maka berlaku:

Jika $a^p = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$ dan $a^q = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$, maka:

$$\begin{aligned} a^p \times a^q &= a^{p+q} \\ a^p \div a^q &= a^{p-q}, \text{ untuk } a \neq 0 \end{aligned}$$

Pangkat Pecahan

Untuk a dan b bilangan bulat dan $\frac{p}{q}$ bilangan dengan $q \neq 0$, maka berlaku:

Jika $a^p = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$ dan $a^q = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$, maka:

$$\begin{aligned} (a^p)^q &= a^{pq} \\ (a^p b^q)^r &= a^{pr} b^{qr} \end{aligned}$$

Bentuk lainnya

Bilangan a disebut basis dan bilangan p disebut pangkat atau eksponen, maka:

$$\begin{aligned} \sqrt[q]{a^p} &= a^{\frac{p}{q}} \\ \sqrt[r]{a^p b^q} &= a^{\frac{p}{r}} b^{\frac{q}{r}} \\ \sqrt[r]{\frac{a^p}{b^q}} &= \frac{a^{\frac{p}{r}}}{b^{\frac{q}{r}}}, \text{ untuk } b \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, a \neq 0 \\ a^{-p} &= \frac{1}{a^p} \end{aligned}$$

Contoh

1. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{6}}}\right)^3 = \dots$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{6}}}\right)^3 \\ &= \frac{a^2b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}} \\ &= a^{\frac{1}{2}}b^2 \\ &= b^2\sqrt{a} \end{aligned}$$

2. Bentuk sederhana dari $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^3\sqrt{x^3}}} = \dots$

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^3\sqrt{x^3}}} \\ &= \sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^3x^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^{\frac{9}{2}}}} \\ &= \sqrt[4]{x^3x^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt[4]{x^{\frac{9}{2}}} \\ &= x^{\frac{9}{8}} \end{aligned}$$

3. Jika n bilangan bulat, maka nilai dari $\frac{3^{n+2}6^{n-3}}{18^{n-2}} = \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{3^{n+2}6^{n-3}}{18^{n-2}} \\ &= \frac{3^{n+2}(3 \cdot 2)^{n-3}}{(3 \cdot 3 \cdot 2)^{n-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3^{n+2} 3^{n-3} 2^{n-3}}{(3^2 \cdot 2)^{n-2}} \\
&= \frac{3^{n+2} 3^{n-3} 2^{n-3}}{3^{2(n-2)} 2^{n-2}} \\
&= \frac{3^{n+2+n-3} 2^{n-3}}{3^{2n-4} 2^{n-2}} \\
&= \frac{3^{2n-1} 2^{n-3}}{3^{2n-4} 2^{n-2}} \\
&= \frac{3^{2n-1} 2^{n-3}}{3^{2n-4} 2^{n-2}} \\
&= 3^{2n-1-(2n-4)} 2^{n-3-(n-2)} \\
&= 3^3 2^{-1} \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

4. Nilai dari $\frac{2^{2021}-2^{2017}}{2^{2019}-2^{2017}} = \dots$

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{2021} - 2^{2017}}{2^{2019} - 2^{2017}} \\
&= \frac{2^{2017}(2^4 - 1)}{2^{2017}(2^2 - 1)} \\
&= \frac{16 - 1}{4 - 1} \\
&= \frac{15}{3} \\
&= 5
\end{aligned}$$

5. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{1}{1+p}\right)^5 \left(\frac{1}{1-p}\right)^{-7} \left(\frac{p-1}{1+p}\right)^{-6} = \dots$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+p}\right)^5 \left(\frac{1}{1-p}\right)^{-7} \left(\frac{p-1}{1+p}\right)^{-6} \\
&= \frac{1}{(1+p)^5} \frac{1}{(1-p)^{-7}} \frac{(p-1)^{-6}}{(1+p)^{-6}} \\
&= \frac{1}{(1+p)^3} \frac{(1-p)^7}{1} \frac{(1+p)^6}{(p-1)^6} = \frac{(1+p)(1-p)^7}{(p-1)^6} \\
&= \frac{(1+p)(1-p)^7}{(-(p-1))^6} = \frac{(1+p)(1-p)^7}{(1-p)^6}
\end{aligned}$$

$$= (1 + p)(1 - p) = (1 - p)^2$$

6. Bentuk sederhana dari $\frac{a^{-5}b^{-5}+a^{-3}b^{-4}}{a^{-4}b^{-2}+a^{-5}b^{-1}} = \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{a^{-2}b^{-5} + a^{-3}b^{-4}}{a^{-4}b^{-2} + a^{-5}b^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{a^2} \frac{1}{b^5} + \frac{1}{a^3} \frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^4} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^5} \frac{1}{b}} \\ &= \frac{\frac{1}{a^2b^5} + \frac{1}{a^3b^4}}{\frac{1}{a^4b^2} + \frac{1}{a^5b}} \\ &= \frac{a+b}{a^3b^5} : \frac{a+b}{a^5b^2} \\ &= \frac{(a+b)}{a^3b^5} \frac{a^5b^2}{(a+b)} \\ &= a^2b^{-3} = \frac{a^2}{b^3} \end{aligned}$$

Soal

1. Bentuk sederhana dari $\frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-7}y^{-1}z^{-4}} = \dots$

2. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{a^2b^{-3}c^4}{a^5b^{-4}c^{-2}}\right)^{-1} = \dots$

3. Bentuk sederhana dari $\frac{\sqrt[3]{a^4 \sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a^3 \sqrt{a}}} = \dots$

4. Jika n bilangan bulat, maka nilai dari $\frac{2^{n+2}6^{n-4}}{12^{n-1}} = \dots$

5. Nilai dari $\frac{2^{2020}-2^{2016}}{2^{2017}-2^{2016}} = \dots$

6. Bentuk sederhana dari $(a-b)^{-3} \left(\frac{a+b}{b-a}\right)^{-2} \left(\frac{1}{a+b}\right)^{-3} = \dots$

7. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{a^{\frac{4}{5}}}{b^{\frac{7}{4}}}\right)^{-1} \left(a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{2}{7}}\right)^2 : \frac{b^{\frac{1}{7}}}{a^{\frac{1}{5}}} = \dots$

8. Bentuk sederhana dari $\frac{x^{-3}y^2+x^{-5}y^3}{x^{-4}y^2+x^{-5}y^5} = \dots$

9. Bentuk sederhana dari $\frac{x^{-3}y^{-7}+x^{-5}y^{-5}}{x^{-4}y^{-7}+x^{-5}y^{-4}} = \dots$
10. Sederhanakan bentuk berikut: $\frac{24a^{-7}b^{-2}c}{6a^{-2}b^{-3}c^{-6}} = \dots$

Daftar Pustaka

- Ratnadewi., dkk (2016). *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains
- J. Purcel, Edwin dan Dale Varberg.(1994). *Kalkulus dan Geometri Analissi, Jilid 1 Edisi 5*. Jakarta: Erlangga
- George F. Simmons. (1976). *Calculus With Analytic Geometry, Second Edition*. North America: The McGraw-Hill
- Thompson, Silvanus. (2012). *Calculus Made Easy*. London: The Macmillan And Co.
- Kreyszig, Erwin. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. The United State of America: Jhon Wiley & Sons, Inc

LOGARITMA

a. Bentuk Umum

Logaritma adalah operasi matematika yang merupakan kebalikan (atau invers) dari eksponen atau pemangkatan. Artinya, logaritma merupakan operasi dimana nilai yang dicari dari suatu logaritma harus membalikkan fungsi dari suatu eksponen.

Sebagai contoh, diberikan bentuk eskponen 2^4 .

Menurut definisi eksponen, $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Dengan menggunakan penjelasan logaritma diatas, maka dapat dituliskan $\log_2 16 = 4$

b. Defenisi

Misalkan a bilangan positif dan tidak sama dengan 1, yakni $0 < a < 1$ atau $a > 1$ dan b bilangan positif. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

atau

$$\log_a b = c \leftrightarrow b = a^c$$

Dengan a, b, c bilangan riil (\mathbb{R})

Keterangan:

a disebut bilangan pokok atau basis

b disebut numerus

c disebut hasil logaritma

Catatan:

Untuk bentuk logaritma dengan basis 10, biasanya angka 10 tidak perlu ditulis.

Misalkan, $\log_{10} a$ dapat ditulis sebagai $\log a$ saja yang nilainya tetap sama.

$\log a$ artinya memiliki basis 10.

SIFAT-SIFAT LOGARITMA

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a b + \log_a c$$

$$= \log_a bc$$

$$\log_a b + \log_a c$$

$$= \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

$$a^m \log b^n = \frac{n}{m} \log a$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

$$\log_a b \times \log_b c$$

Contoh:

1. Tentukan hasil dari logaritm $6_{\log 9} + 6_{\log 8} - 6_{\log 2}$

$$\begin{aligned} 6_{\log 9} + 6_{\log 8} - 6_{\log 2} &= 6_{\log \frac{9 \cdot 8}{2}} \\ &= 6_{\log 36} \\ &= 6_{\log 6^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. Sederhanakan bentuk $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log(ab)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log(ab) \\ &= \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} (\log a + \log b) \\ &= \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log b \end{aligned}$$

$$= 0$$

3. Bentuk sederhana dari persamaan $\log_9 27 + \log_{25} \sqrt{5} - \log_{0,5} 2$

$$\begin{aligned} & \log_9 27 + \log_{25} \sqrt{5} - \log_{0,5} 2 \\ &= \log_{3^2} 3^3 + \log_{5^2} 5^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &= \frac{3}{2} \log_3 2 + \frac{1}{4} \log_5 5 - (-\log_2 2) \\ &= \frac{3}{2}(1) + \frac{1}{4}(1) + 1 \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

4. Bentuk sederhana dari $\log_2(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \log_2(3\sqrt{2} + \sqrt{2})$

$$\begin{aligned} & \log_2(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \log_2(3\sqrt{2} + \sqrt{2}) \\ &= \log_2((3\sqrt{2} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} + \sqrt{2})) \\ &= \log_2(18 - 2) \\ &= \log_2 16 \\ &= \log_2 2^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

5. Sederhanakan bentuk logaritma berikut ini: $\frac{(\log_4 3)(\log_4 6)}{(\log_4 9)(\log_8 2) + (\log_4 9)(\log_8 3)}$

$$\begin{aligned} & \frac{(\log_4 3)(\log_4 6)}{(\log_4 9)(\log_8 2) + (\log_4 9)(\log_8 3)} \\ &= \frac{(\log_4 3)(\log_4 6)}{\log_4 9 (\log_8 2 + \log_8 3)} \\ &= \frac{\log_4 3 \log_4 6}{\log_4 9 (\log_8 6)} \\ &= \frac{\log_4 3}{\log_4 3^2} \cdot \frac{\log_{2^3} 6}{\log_{2^3} 6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

6. Hasil dari $\frac{\log_7 4\sqrt{6} + \log_7 \sqrt{2} + \log_7 3}{\log_7 12}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\log_7 4\sqrt{6} + \log_7 \sqrt{2} + \log_7 3}{\log_7 12} \\
&= \frac{\log_1(4\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot 3)}{\log_7 12} \\
&= \frac{\log_1(12\sqrt{12})}{\log_7 12} \\
&= \frac{\log_7 12^{\frac{3}{2}}}{\log_7 12} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

7. Bentuk sederhana dari $\log_3 4 \log_{25} 9 \log_2 5$

$$\begin{aligned}
& \log_3 4 \log_{25} 9 \log_2 5 \\
&= \log_3 2^2 \log_{5^2} 3^2 \log_2 5 \\
&= 2 \log_3 2 \cdot \frac{2}{2} \log_3 \cdot \log_2 5 \\
&= 2 \log_3 2 \log_2 5 \log_5 3 \\
&= 2 \log_3 3 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Soal

Sederhanakan bentuk logaritma berikut ini:

1. $\log_3 54 + \log_3 2 - \log_3 4 = \dots$
2. $\log_3 81 + \log_3 243 - \log_3 27 = \dots$
3. $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log ab = \dots$
4. $2 \log_9 2 + 3 \log_9 3 - \log_9 36 = \dots$
5. $\log_3(4\sqrt{2} - \sqrt{5}) + \log_3(4\sqrt{2} + \sqrt{5}) = \dots$
6. $\frac{\log_3 2\sqrt{2} + \log_3 \sqrt{3} + \log_3 18}{\log_3 6} = \dots$
7. $\frac{\log_2 3 \log_5 7}{\log_8 9 \log_5 \sqrt{7}} = \dots$
8. $\frac{(\log_4 3)(\log_4 6)}{(\log_4 9)(\log_8 2) + (\log_4 9)(\log_8 3)} = \dots$

Daftar Pustaka

- Ratnadewi., dkk (2016). *Matematika Teknik Untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains
- J. Purcel, Edwin dan Dale Varberg.(1994). *Kalkulus dan Geometri Analissi, Jilid 1 Edisi 5*. Jakarta: Erlangga
- George F. Simmons. (1976). *Calculus With Analytic Geometry, Second Edition*. North America: The McGraw-Hill
- Thompson, Silvanus. (2012). *Calculus Made Easy*. London: The Macmillan And Co.
- Kreyszig, Erwin. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. The United State of America: Jhon Wiley & Sons, Inc